30/3/17

Συμπερασματολογία για τη διαφορά δύο μέσων τιμών $\mu_1-\mu_2$

Παράδειγμα: Ομ1: 100, 102, 96, 106, 110, 110, 120, 112, 112, 90 / $N(\mu_1,\sigma_1^2)$

Ομ2: 104, 88, 100, 98, 102, 96, 100, 96, 96, 92 / $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$n_1=10$, $n_2=10$, $\alpha=0.05$ // Υπάρχει διαφορά;

Γενικά: Έστω $x_{11},\dots,x_{1n_1}$ τδ από πληθυσμό (μ_1,σ_1^2) και $x_{21},\dots,x_{2n_2}$ τδ από άλλο ανεξ. πληθυσμό (μ_2,σ_2^2). Ενδιαφέρει η παράμετρος $\mu_1-\mu_2$.

Έστω $\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}$,

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2$$

Δείγμα	Μέγεθος	Βαθμοί Β.Ε Ελευθερίας	Μέσες Τιμές Δειγμάτων	Αθροίσματα Τετραγώνων SS
1	$n_1=10$	$n_1-1=9$	$\bar{x}_1=105.8$	$\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2=\sum x_{1i}^2-n_1\bar{x}_1^2 = 707.6$
2	$n_2=10$	$n_2-1=9$	$\bar{x}_2=97.2$	$\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2 = 201.6$
Σύνολο		n_1+n_2-2		Σύνολο $SS=909.2$

$$\widehat{\mu_1-\mu_2}=\bar{x}_1-\bar{x}_2 \quad \text{κ'} \quad \sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2} \quad \text{κ'} \quad \hat{\sigma}^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

(i) Κανονικοί Πληθυσμοί, $N(\mu_1, \sigma_1^2$ γνωστό$)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2$ γνωστό$)$

$\widehat{\mu_1-\mu_2} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, $\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ $\quad \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \\ \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Επειδή, $\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ Δ.Ε. για $\mu_1-\mu_2$:

$$L = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$U = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις της μορφής

(i) $H_0: \mu_1-\mu_2 = \delta_0$ v $H_\alpha: \mu_1-\mu_2 > \delta_0$ (δ_0 γνωστό) κρ. περ. $Z > z_\alpha$

(ii) $H_0: \mu_1-\mu_2 = \delta_0$ v $H_\alpha: \mu_1-\mu_2 < \delta_0$ $\quad Z < -z_\alpha$

(iii) $H_0: \mu_1-\mu_2 = \delta_0$ v $H_\alpha: \mu_1-\mu_2 \neq \delta_0$ $\quad |Z| \geq z_{\alpha/2}$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \text{ αν } H_0 \text{ αληθής}$$

και κρίσιμες περιοχές μεγέθους α (επιπ. σημ. α)

(ii) Κανονικοί πληθυσμοί, $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ άγνωστο

$\widehat{\mu_1-\mu_2} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, $s^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$ κ' $\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

$$\hat{\sigma}^2 = S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{\text{Συνολικό } SS}{\text{Συνολικοί β.ε.}}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Επειδή $\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ Δ.Ε. για $\mu_1-\mu_2$:

$L = \bar{x}_1-\bar{x}_2 - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

$U = \bar{x}_1-\bar{x}_2 + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό:

$t = \dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-\delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$ όταν H_0 αληθ.

Για να ελέγξουμε υποθέσεις στο επίπεδο

(i) $H_0: \mu_1-\mu_2 \le \delta_0$ v $H_\alpha: \mu_1-\mu_2 > \delta_0$ (δ_0 σταθ.) $t \ge t_{\alpha, n_1+n_2-2}$

(ii) v $H_\alpha: \mu_1-\mu_2 < \delta_0$ $t \le t_{\alpha, n_1+n_2-2}$

v $H_\alpha: \mu_1-\mu_2 \ne \delta_0$ $|t| \ge t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$

$H_0: \mu_1-\mu_2 = 0$ v $H_\alpha: \mu_1-\mu_2 \ne 0$

ή $H_0: \mu_1=\mu_2$ v $H_\alpha: \mu_1 \ne \mu_2$

$t = \dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-0}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \dfrac{105.8-97.2}{\sqrt{909.2}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}$

Επειδή $2.70 > 2.101$ απορρ. H_0, $\alpha=5\%$

κρ. περ. για $\alpha=0.05$, $|t| \ge t_{0.025, 18} (=2.101)$

(iii) Μη κανονικοί πληθυσμοί, Πληθ.(μ_1, σ_1^2), Πληθ.(μ_2, σ_2^2) $n_1, n_2 \ge 30$

$\widehat{\mu_1-\mu_2} = \bar{x}_1-\bar{x}_2$, $\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$ κ' $\hat{\sigma}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}$

ΚΟΘ: $\bar{x}_1-\bar{x}_2 \overset{\text{προσ.}}{\sim} N\left(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right) = N\left(\mu_1-\mu_2, \dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)$

$\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$

$(1-\alpha)100\%$ Δ.Ε. : $\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό

$$Z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-\delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{\pi\rho\sigma\varsigma} N(0,1) \text{ όταν } H_0 \text{ αληθ.}$$

και κρ. περ. μεγέθους α (επι. σημ. α)

Σύγκρισης κατά ζεύγη

Παράδειγμα 4.6

Δείγμα:

	1	2	3	...	9	10
Πριν την επεξεργασία (x_{1i}):	6.88	7.05	8.24	...	5.87	6.54
Μετά την επεξεργασία (x_{2i})	6.85	6.84	7.07		5.88	6.41
Διαφορές $D_i = x_{1i}-x_{2i}$:	0.03	0.21	1.17		-0.01	0.13

$D_1,\dots,D_n \sim N(\delta,\sigma^2)$

$\delta = \mu_1-\mu_2$

$H_0: \delta=0 \ \vee \ H_a: \delta>0 \rightarrow t \geq t_{\alpha,n-1}$ $(t_{0.05,4}=1.833)$

$\alpha:$

$t=\frac{\bar{D}-\delta_0}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$H_0: \delta=\delta_0 \ \vee \ H_a \neq \delta_0 \rightarrow |t| \geq t_{\alpha/2,n-1}$

$t=\frac{\bar{D}-0}{S_D/\sqrt{10}}$ κρ. περ. $t \geq t_{0.05,9}$

$\bar{D}=0.236$, $S_D^2=0.1352$, $S_D=0.365$

$t=2.03>1.833$ απορ. H_0

Θεραπεία αποτελεσματική